Iluminación y vigilancia en las Galerías de Arte

Gregorio Hernández Peñalver
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
e-mail: gregorio@fi.upm.es

Resumen
In this paper we present some results about Art Galleries Problems

1. Introducción

Hoy en día las salas de los nuevos museos no tienen, en general, formas regulares en sus plantas, lo que da lugar a interesantes problemas de iluminación. Si la planta fuera un polígono convexo, una única fuente de iluminación bastaría para iluminar toda la sala, pero la irregularidad impide esta solución económica. Así se plantea el problema de minimizar el nº de luces que son necesarias para iluminar la sala.

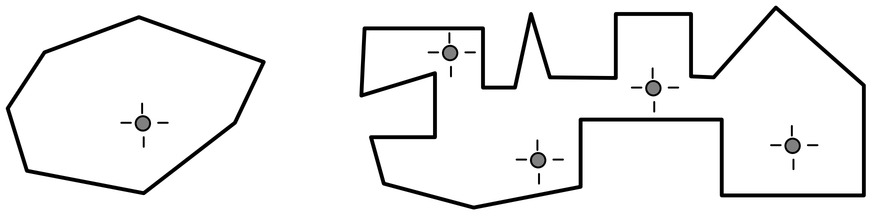


Figura 1. Iluminando distintas salas

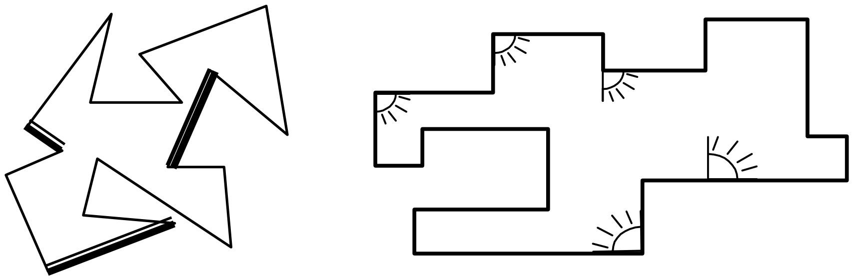
Los problemas de iluminación han atraído la mirada de los matemáticos desde hace tiempo. Mencionemos aquí dos de ellos:

Problema de Hadwiger
¿Cuántos reflectores se necesitan para iluminar el contorno exterior de una figura plana, compacta, convexa y de borde liso? Boltyanski probó en 1960 que tres reflectores son siempre suficientes.

Problema de Strauss
Pensemos en una sala de planta poligonal cuyas paredes son espejos. ¿Es cierto que basta colocar una fuente luminosa en cualquier punto de la sala para iluminarla completamente?. ¿Habrá siempre un punto con esa propiedad?
Recientemente Tokarsky [To] ha probado que la respuesta a la primera pregunta es negativa. Pero la segunda parte de la conjetura permanece abierta.

Volvamos al problema de iluminación de una sala en un museo. La cuestión fue planteada por V. Klee en 1973 en estos términos: *Determinar el mínimo número de puntos de un polígono suficientes para ver a todos los restantes*. Se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal: ¿Cuántos guardias (o cámaras de vigilancia que cubran 360º) son suficientes para vigilar el interior de un polígono de n lados?
La respuesta a este problema fue obtenida por Chvátal [Ch] en 1975, quien demostró que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes. En 1978, Fisk dio una demostración concisa y elegante que ampliaremos más adelante: *Triangúlese el polígono, coloréese con 3 colores el grafo de la triangulación y pónganse los guardias en los vértices coloreados con el color que menos veces aparezca.*
El problema así resuelto es de naturaleza combinatoria pues responde a la generalidad de los polígonos de n lados. Sin embargo no todos los polígonos de n lados requieren ese nº de guardias (por ejemplo, cualquier convexo de n lados sólo requiere un guardia). Por ello tiene sentido plantear el siguiente problema algorítmico: *Dado un polígono P, calcular el mínimo nº de guardias que lo vigilan*. Desgraciadamente no existe ningún algoritmo eficiente que lo resuelva, pues Lee y Lin [LL] han probado que es un problema de complejidad NP. (Informalmente hablando esto significa que no se conoce ningún algoritmo para resolverlo en que el número de operaciones efectuadas sea un polinomio en el nº de datos de entrada)

Tras conocer la respuesta al problema planteado por Klee surgen de modo inmediato multitud de nuevas preguntas: ¿Qué sucede si el objeto a vigilar es un tipo especial de polígono, o si se quiere iluminar el exterior del polígono o, más general, de una configuración de objetos? Estas preguntas corresponden a variantes del Problema en las que cambia el objeto a vigilar. Pero también podemos modificar las características de los guardias o de los focos de luz. En el problema original los guardias son estáticos, vigilan en todas las direcciones y su vigilancia tiene alcance ilimitado. Permitiendo, por ejemplo, que los guardias patrullen por segmentos o limitando la amplitud de los focos luminosos tendremos distintas variantes del Problema de las Galerías de Arte.



Guardias-lado Reflectores de amplitud $\pi/2$

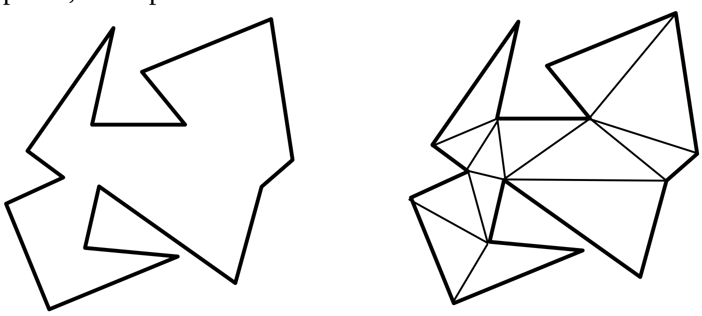
Figura 2. Diferentes formas de vigilar o iluminar

En este artículo comenzaremos con la demostración de Fisk del denominado Teorema de las Galerías de Arte y presentaremos después algunas de las variantes mencionadas.

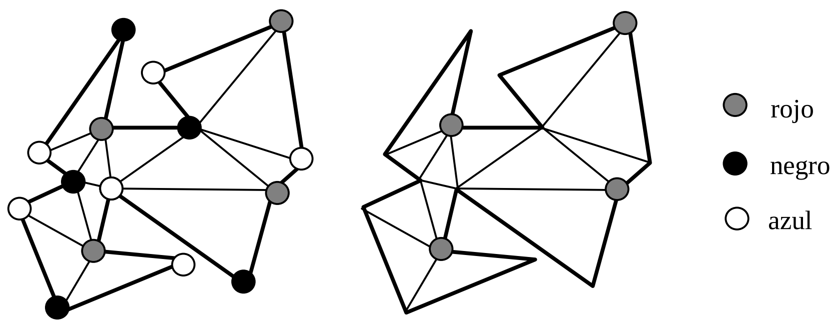
2. Teorema de las Galerías de Arte

Para vigilar una galería de arte poligonal con n vértices, $\lfloor n/3 \rfloor$ *guardias son siempre suficientes. Existen salas que necesitan ese nº de guardias*.

Demostración. (Fisk [Fi])
Consideremos un polígono simple P de n vértices y observemos gráficamente los siguientes pasos, anticipados en la introducción:



Polígono P Triangulación T



3-coloración de T Asignación de guardias

Figura 3. La demostración en imágenes

Y ahora pasemos a la explicación.

Primer paso. (Triangulación)
Triangulamos P, es decir, descomponemos P en triángulos cuya unión es P, con interiores disjuntos y cuyos vértices son vértices de P. Observamos que un guardia situado en cualquier vértice de un triángulo vigila completamente dicho triángulo.

Segundo paso. (Coloración)
La triangulación anterior es un grafo plano. El Teorema de los cuatro colores, probado en 1976 por Appel y Haken, asegura que todo grafo plano puede colorearse utilizando sólo cuatro colores. Pero podemos colorear los vértices de una triangulación T de un polígono utilizando tan sólo tres colores. (Una coloración de un grafo es una asignación de colores a los vértices del grafo de modo que dos vértices adyacentes reciben diferente color)
En esta 3-coloración de T cada triángulo tiene un vértice de cada color.

Tercer paso. (Colocación de guardias)
Cada triángulo de T tiene un vértice rojo. Si colocamos un guardia en cada vértice rojo, vigilarán todos los triángulos y, por tanto, todo el polígono. Lo mismo sucederá si colocamos guardias en todos los vértices negros o si los colocamos en todos los vértices azules.

El polígono tiene n vértices y disponemos de 3 colores. Por tanto, alguno de los tres colores, rojo, negro o azul se utiliza en, a lo más, $\lfloor n/3 \rfloor$ vértices. (Esto es una aplicación inmediata del Principio del palomar o de Dirichlet: Si cada color se utilizara en más de $\lfloor n/3 \rfloor$ vértices, sumando los vértices de cada color tendríamos más de n vértices). Basta pues, colocar los guardias en los vértices con el color menos utilizado para garantizar que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono de n vértices.

Cuarto paso (Necesidad de los $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias)
Para comprobar que este número de guardias es a veces necesario, basta considerar el polígono "peineta" con **n=3k** vértices de la Figura 4. Es fácil observar que para vigilar este polígono se necesitan al menos k guardias, uno por cada púa de la peineta.

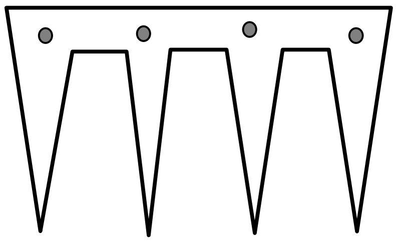


Fig. 4. Polígono “peineta”

¿Hemos terminado la demostración? En el primer paso comenzamos triangulando el polígono pero, ¿todo polígono admite una triangulación? En el segundo paso decimos que el grafo de la triangulación es 3-coloreable. Justifiquemos ambas afirmaciones.

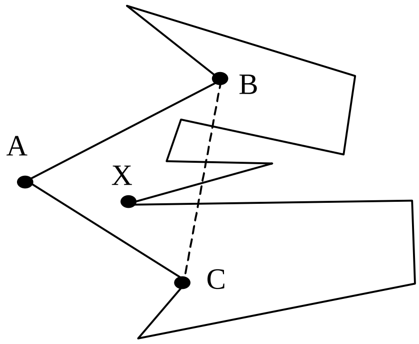
3. Triangulación de un polígono

Propiedad 1. *Todo polígono se puede triangular.*

Demostración.
Por inducción sobre n, nº de vértices del polígono.
Si n=3, el polígono ya es un triángulo.
Si n≥4, se traza una diagonal cualquiera que descompone el polígono P en otros dos con menor nº de vértices. Por hipótesis de inducción cada uno de estos polígonos admite una triangulación lo que proporciona una triangulación de todo P.

Analicemos la frase: "se traza una diagonal .....". ¿Esto se puede hacer siempre? ¿Existe siempre una diagonal? La respuesta es afirmativa pero se han publicado varias pruebas incorrectas a lo largo de los años.

Lema
Todo polígono de n vértices, n≥4, admite una diagonal interna.
Demostración.
En primer lugar observamos que todo polígono tiene algún vértice convexo (por ejemplo, el situado más a la izquierda). Llamemos A a dicho vértice y B y C a sus adyacentes. Si el segmento BC está contenido en el polígono P será la diagonal buscada. Si no es así, en el triángulo ABC habrá vértices de P. Tomamos el más alejado X de la recta BC. Así AX está contenido en P y es la diagonal buscada



(Una de las demostraciones incorrectas pero publicadas toma como diagonal válida el segmento AZ donde Z es el vértice más próximo al punto A. El lector puede construir un polígono en el que AZ no es una diagonal válida)

Propiedad 2
Cualquier triangulación de un polígono es un grafo plano 3-coloreable.

Demostración.
Sea P un polígono y T(P) una triangulación de P. Demostraremos el resultado por inducción sobre n, número de vértices del polígono P.
Si n=3, la triangulación coincide con P y la 3-coloración es obvia.
Si n>3 se toma una diagonal uv que parte T(P) en dos polígonos triangulados T(P’) y T(P’’) cuyo nº de vértices es menor que n. Por inducción podemos colorear las triangulaciones de P’ y P’’ asignando en ambas el color 1 al vértice u y el color 2 a v. Así tenemos una 3-coloración de T(P).

Para concluir este apartado sobre triangulación indiquemos que la generalización a dimensión tres es falsa: existen poliedros que no se pueden descomponer en tetraedros sin añadir vértices adicionales.

4. Rutas de vigilancia

La vigilancia de las salas de un museo sigue cuando sus puertas se cierran al público. ¿Qué ruta debe seguir un vigilante en su ronda nocturna? El problema puede plantearse así: Dado un polígono P hallar el camino cerrado C de longitud mínima tal que cada punto de P sea visible desde algún punto de C. Este camino mínimo recibe el nombre de *Ruta del vigilante*.

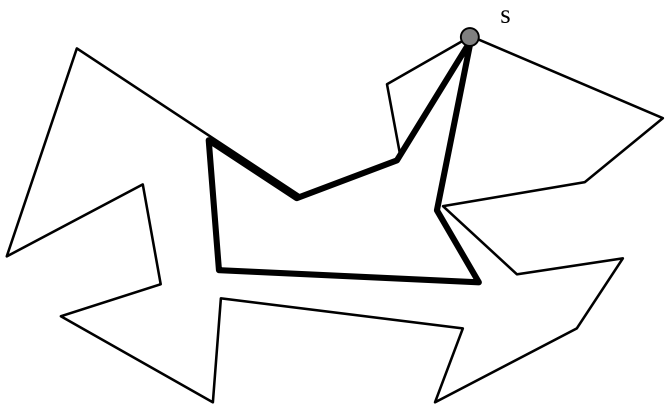


Figura 5. Ruta del vigilante con origen en el punto s

Si se especifica cuál debe ser el punto de partida (y llegada) del vigilante, Chin y Ntafos [CN] han diseñado algoritmos eficientes para resolver el problema, pero éste permanece abierto si no se conoce el punto de partida.

Chin y Ntafos han planteado, y resuelto parcialmente, otros problemas sobre rutas de vigilancia que denominan con los sugerentes nombres de *Ruta del Guardián del Zoo* y *Ruta del Safari*. En estos problemas el objetivo es caminar en el interior de un polígono P visitando k polígonos contenidos en él. En el Problema de la *Ruta del Safari* se permite entrar en los polígonos, como si fueran los pabellones de una exposición. En el Problema de la *Ruta del Guardián del Zoo*, está prohibida la entrada, pues el guardián del zoo no entra en las jaulas para alimentar a los animales.

5. Vigilancia vigilada

Si los ladrones neutralizan uno de los guardias que vigilan una sala, podrán "trabajar" tranquilamente en la zona controlada exclusivamente por ese guardia. Es interesante, por tanto, pedir que cada guardia sea vigilado al menos por otro guardia. Así llegamos a los denominados guardias vigilados (o *w-guardias*), introducidos en [H1] y [H2].

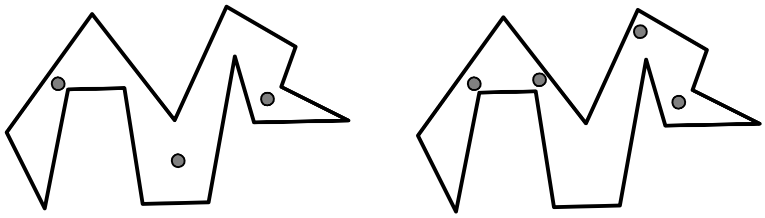


Figura 6. Un polígono con 3 guardias y 4 *w-guardias*

En [H1] se demuestra que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias* son siempre suficientes, y a veces necesarios, para vigilar un polígono de n lados. En la demostración se trabaja sobre la triangulación del polígono, de modo análogo a la prueba del Teorema de las Galerías de Arte, probándose realmente un resultado más fuerte: que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias* vigilan cada uno de los triángulos y, por tanto, a todo el polígono. La demostración es por inducción sobre el nº de lados del polígono P. En primer lugar se prueba el resultado para polígonos con hasta 11 lados. Para polígonos con más de 11 lados se toma una triangulación T y se prueba la existencia de una diagonal que corta P en dos polígonos, P' y P'', uno de los cuales, por ejemplo P', contiene entre 6 y 10 lados del polígono P. Se analiza la w-vigilancia de P' en cada uno de los casos y se combina con la w-vigilancia de P'' para obtener la cota deseada en la vigilancia de todo P.

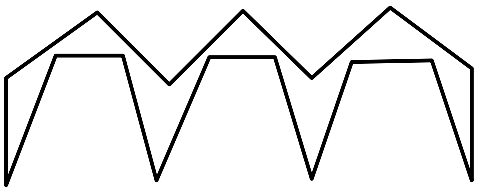
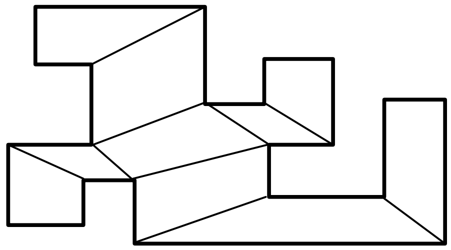
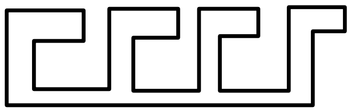


Figura 7. Un polígono que requiere $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias*

En [H2] se estudia el problema para polígonos isotéticos u ortogonales (de lados paralelos a dos direcciones ortogonales), demostrando que el nº de w-guardias es $\lfloor n/3 \rfloor$ en este caso. La herramienta fundamental para trabajar sobre polígonos ortogonales no es la triangulación, sino la cuadrangulación o descomposición en cuadriláteros convexos.



Cuadrangulación de un polígono ortogonal



Polígono con $\lfloor n/3 \rfloor$ *w-guardias*

Figura 6. Vigilancia vigilada en polígonos ortogonales

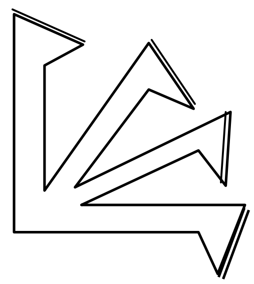
6. Un problema abierto

La pregunta inicial de Klee en 1973 originó desde su formulación un importante número de trabajos. En 1987, O'Rourke [O'R] publicó *Art Gallery: Theorems and Algorithms* recogiendo todos los resultados obtenidos hasta ese momento en el campo de la iluminación de polígonos. Los avances y nuevas líneas abiertas desde entonces pueden consultarse en los trabajos recopilatorios de Shermer [Sh] y Urrutia [Ur].

Terminaremos esta pequeña muestra de los problemas en Galerías de Arte mencionando uno de los problemas abiertos más antiguo en el área:

Si permitimos que cada guardia pueda patrullar por una de las paredes del museo, de forma que vigile todos los puntos que son visibles desde algún punto de esa pared, ¿cuántos guardias se necesitan para vigilar?

En 1983, G. Toussaint conjeturó que, excepto para unos pocos polígonos, ⌊n/4⌋ guardias-lado son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados. (Se invita al lector a buscar un polígono de 7 lados que requiera 2 guardias-lado).
En este problema no es útil la técnica de triangulación, pues existen ejemplos en los que necesitan ⌊3n/10⌋ guardias-lado para vigilar todos los triángulos de la triangulación.


Polígono que requiere ⌊n/4⌋ guardias-lado

Agradecimientos
A la memoria de D. Pedro Abellanas, quien me inició en los caminos de la Geometría.

Referencias

[Ch] Chvátal, V.: “A Combinatorial Theorem in Plane Geometry”, *Journal of Combinatorial Theory*, serie B, 18, pág. 39-41, (1975)
[CN] Chin, W. P., Ntafos, S.: "Shortest watchman routes", *Discrete and Comp. Geometry*, 6, pág. 9-31, (1991)
[Fi] Fisk, F.: “A Short Proof of Chvátal Watchman Theorem”, *Journal of Combinatorial Theory*, serie B, 24, pág. 374, (1978)
[H1] Hernández, G.: “Controlling Guards”, *Proc. of the sixth Canadian Conference on Computational Geometry*, pág. 387-392, (1994)
[H2] Hernández, G.: “Vigilancia vigilada en polígonos ortogonales”, *Actas de los VI Encuentros de Geometría Computacional*, pág. 198-205, (1995)
[LL] Lee, D., Lin, A.: “Computational Complexity of Art Gallery Problems”, *IEEE Trans. On Information Theory*, 32, pág. 276-282, (1986)
[O’R] O’Rourke, J.: “Art Gallery: Theorems and Algorithms”, Oxford Univ. Press, 1987.
[Sh] Shermer, T.: “Recent Results in Art Galleries”, *Proceedings of the IEEE,* vol. 80, 9, pág. 1384-1399, (1992)
[To] Tokarsky, G. W.: “Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point”. *Amer. Math. Monthly*, vol. 102, pág. 867-879, (1995)
[Ur] Urrutia, J.: “Art Gallery and Illumination Problems”, en “Handbook on Computational Geometry”, Elsevier (J.R. Sack and J. Urrutia eds.) 1999.